# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2025**

# MATHÉMATIQUES

# JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

*La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

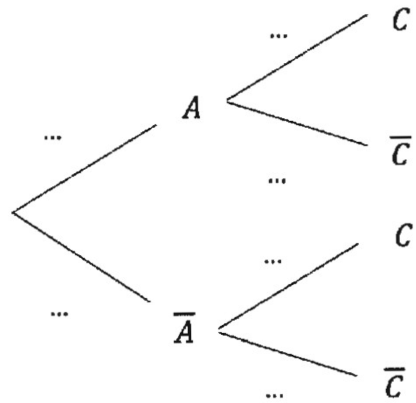
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

**Exercice 1 (5 points)**

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.
Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac.
Si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
Si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :
$A$ : « le joueur obtient une boule avec la lettre A » ;
$C$ : « le joueur obtient un billet de 50 euros ».




1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « *Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de* 50 *euros* » ?

3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0,3375.

4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros. L'affirmation « *Il y a plus de* 80% *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B* » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note $X_1$ la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur. Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 euros, on a $X_1 = 50$.

   Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,5 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note $X_2$ la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.
   On note $Y$ la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

   **a.** Montrer que $E(Y) = 47$.

   **b.** Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$.

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième, …, une centième partie.
   On définit donc de la même façon les variables aléatoires $X_3, X_4, \ldots, X_{100}$.
   On note $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$.

   Démontrer que la probabilité que $Z$ appartienne à l'intervalle $]1950\,;2750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

## Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(4;-4;4),\ B(5;-3;2),\ C(6;-2;3) \text{ et } D(5;1;1).$$

**1.** Démontrer que le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.

**2.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est :

$$x - y - 8 = 0\,.$$

**3.** On note $d$ la droite passant par le point $D$ et orthogonale au plan $(ABC)$.

**a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.

**b.** On note $H$ le projeté orthogonal du point $D$ sur le plan $(ABC)$.
Déterminer les coordonnées du point $H$.

**c.** Montrer que $DH = 2\sqrt{2}$.

**4. a.** Montrer que le volume de la pyramide $ABCD$ est égal à 2.

*On rappelle que le volume $V$ d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :*

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h\,,$$

*où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et $h$ la hauteur correspondante.*

**b.** On admet que l'aire du triangle $BCD$ est égale à $\frac{\sqrt{42}}{2}$.
En déduire la valeur exacte de la distance du point $A$ au plan $(BCD)$.

**Exercice 3 (6 points)**

On considère $n$ un entier naturel non nul.
On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction $f_n$ est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et on note $f_n'$ sa fonction dérivée.

**Partie A**

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction $f_1$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = xe^{1-x}.$$

**1.** Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positif pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0 ; 1[$.

**2.** En déduire le tableau de variations de la fonction $f_1$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

**3.** En déduire que l'équation $f_1(x) = 0{,}1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

**1. a.** Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n$ non nul,
;

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

**c.** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**2. a.** A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

**b.** On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()`.

```
from math import exp

def suite() :
    u= ...
    for n in range (1,...):
       u= ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x$.

**3. a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

**b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4 (5 points)**

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est* ***vraie*** *ou* ***fausse****, en* ***justifiant*** *la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

**Affirmation 1 :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(E)\ : -2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

On considère la fonction $f$ définie sur **R** par :

$$f(x) = 2\cos(x) - \sin(x).$$

**Affirmation 2 :** La fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** On considère la fonction $g$, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1) + 8.$$

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 25$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite $(u_n)$ est strictement positive.

**Affirmation 3 :** La suite $(u_n)$ est décroissante.

**4.** On considère une fonction affine $h$ définie sur **R**.
On note $k$ la fonction définie sur **R** par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

**Affirmation 4 :** La fonction $k$ est convexe sur **R**.

**5.** Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.

**Affirmation 5 :** Le mot EULER possède 120 anagrammes.